

Principio d'induzione

Principio d'induzione

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $P(n)$ un predicato. Supponiamo che valgano le seguenti proprietà:

- ▶ $P(0)$ è vera;
- ▶ $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Allora $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Usando il Principio d'induzione si possono definire le successioni ricorsive come ad esempio

- ▶ Fattoriale: $0! = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)! = (n+1) \cdot n!$.

- ▶ Coefficiente binomiale:

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, \quad \binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & k > n. \end{cases}$$

Principio d'induzione

Esercizi su fattoriale e coefficiente binomiale

$$1. \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$2. \binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k}$$

$$3. \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

$$4. \binom{n}{1} = n$$

$$5. \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Principio d'induzione

Disuguaglianza di Eulero e Binomio di Newton

Usando il Principio d'induzione si possono dimostrare formule utili:

- ▶ Disuguaglianza di Eulero:

$$\forall x \in [-1, \infty), \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+x)^n \geq 1+nx.$$

- ▶ Formula del binomio di Newton:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

- ▶ $a > 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad a^n > n.$

- ▶ $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

Principio d'induzione

Disuguaglianza di Eulero e Binomio di Newton

6. Dimostrare che, per n abbastanza grande, si ha $2^n > n^{100}$ (usare la relazione $\forall x \in (-1, \infty), \log(1+x) \leq x$).
7. Dimostrare per induzione le seguenti formule: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\blacktriangleright \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\blacktriangleright \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\blacktriangleright \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

8. Sia $a \geq 1$, dimostrare che:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n}$$

9. Dimostrare che:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq n^{\frac{1}{2n}} - 1 \leq \frac{\sqrt{n}-1}{n}$$

Alcuni calcoli utili:

► $\forall n \in \mathbb{N}$, $2n$ è pari, $2n \pm 1$ è dispari.

► $(-1)^n$

► $\cos(n\pi)$

► $\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

► $\sin(n\pi)$

► $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

Estremi degli insiemi numerici

Massimi, minimi, estremo superiore, estremo inferiore

Sia $A \subset \mathbb{R}$, sia $\chi \in \mathbb{R}$, allora:

- χ è maggiorante (minorante) di A se:

$$\forall a \in A, \quad a \leq \chi \quad (a \geq \chi).$$

In questo caso si dice che A è limitato superiormente (inferiormente).

- χ è massimo (minimo) di A se:

1. $\chi \in A$,
2. $\forall a \in A, \quad a \leq \chi \quad (a \geq \chi).$

In questo caso si scrive $\chi = \max A$ ($\chi = \min A$)

- χ è estremo superiore (estremo inferiore) di A se:

χ è il minimo dei maggioranti (massimo dei minoranti).

In questo caso si scrive $\chi = \sup A$ ($\chi = \inf A$).

Estremi degli insiemi numerici

Completezza di $\mathbb{R}$, e Proprietà di Archimede

1. Non tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ superiormente (inferiormente) limitati ammettono massimo (minimo).

Esempio: $(2, 3)$, $[4, 6)$

2. Assioma di Completezza di $\mathbb{R}$: Ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ superiormente (inferiormente) limitato ammette estremo superiore (inferiore) in $\mathbb{R}$.

3. Incompletezza di $\mathbb{Q}$: Non tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$ superiormente (inferiormente) limitati ammettono estremo superiore (inferiore) in $\mathbb{Q}$.

Esempio: $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$

4. Proprietà di Archimede: Per ogni $a, b > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $na > b$

Estremi degli insiemi numerici

Determinare gli estremi dei seguenti insiemi:

1. $E = \{-1, 2, 5\}$

2. $E = [-1, 5)$

3. $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}\}$

4. $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{(-1)^n}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}\}$

5. $E = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{1+x} > x\}$

6. $E = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{1+x} < x\}$

7. $E = \{x \in \mathbb{R} : \log(x+2) \leq x-1\}$

8. $E = \{x \in \mathbb{R} : \log_{1/2}(x+1) \geq x \log_{\frac{1}{2}} e\}$

Estremi degli insiemi numerici

9. $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{7n^2-n}{2n^2}, n \geq 1\}$

10. $E = \{x \in \mathbb{R} : x = 8 \arctan\left(\frac{2n}{2n+1}\right), n \in \mathbb{N}\}$

11. $E = \{x \in \mathbb{R} : x = 3^{1/n}, n \geq 1\}$

12. $E = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$

13. $E = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{|5-n|}{n+3}, n \in \mathbb{N}\right\}$

14. $E = \left\{x \in \mathbb{R} : x = (1 + (-1)^n) \left(1 - \frac{1}{n}\right), n \geq 1\right\}$

Estremi degli insiemi numerici

15. $E = \{x \in \mathbb{R} : x = 1 + (-1)^n \pi + \arctan(n), n \in \mathbb{N}\}$

16. $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \cos(n\pi) \frac{2n+1}{2n}, n \geq 1\}$

17. $E = \{x \in \mathbb{R} : x = |\sin(n\frac{\pi}{2})| + \frac{7}{n}, n \geq 1\}$

18. $E = \{x \in \mathbb{R} : x = 2 \cos(n\pi) + \frac{1}{n}, n \geq 1\}$

19. $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{2} |\sin(n\frac{\pi}{2})|, n \geq 1\}$

20. $E = \left\{x \in \mathbb{R} : x = 2 |\sin(n\frac{\pi}{2})| + \frac{(-1)^n}{e^n}, n \in \mathbb{N}\right\}$

21. $E = \{x \in \mathbb{R} : x = (n+1)^{-3} \cos(n\frac{\pi}{2}) \text{ per } n \in \mathbb{N}\}.$

22. $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n+(-1)^n}{n+2} \text{ per } n \in \mathbb{N}\}.$

23. $E = \{x \in \mathbb{R} : x = (1 + (-1)^n)n^n + \frac{(1-(-1)^n)}{2^n} \text{ per } n \in \mathbb{N}\}.$

Estremi degli insiemi numerici

24. $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \tan\left(\pi \frac{n+1}{2n-1}\right) \text{ per } n \in \mathbb{N}\}.$
25. $E = \{x \in \mathbb{R} : x = 28 \arctan\left(\frac{7n}{7n+1}\right) \text{ per } n \in \mathbb{N}\}.$ (Analisi A 03/09/2012)
26. $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \max\{\frac{8n+1}{n}, n^2 + 1\} \text{ per } n \geq 1\}.$ (Analisi A 03/04/2007)
27. $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{3n-1}{|2n-9|} \text{ per } n \in \mathbb{N}\}.$
28. $E = \{x \in \mathbb{R} : x = -2e^{-|n-1|} \text{ per } n \geq 1\}.$
29. $E = \{x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{ per } n \geq 1\}.$
30. $E = \{x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + 2(1 - (-1)^n) \text{ per } n \in \mathbb{N}\}.$ (Analisi A 01/02/2012)
31. $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \arcsin\left(\frac{n+1}{2n}\right) \text{ per } n \geq 1\}.$
32. $E = \{x \in \mathbb{R} : x = \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \text{ per } n \in \mathbb{N}\}.$